CAMPIONAMENTO DI SEGNALI

Alla base della discretizzazione di un segnale sorgente continuo sono i due procedimenti distinti di discretizzazione rispetto al tempo, detto **campionamento**, e rispetto all'ampiezza, detto **quantizzazione.**

La condizione per poter rappresentare univocamente un segnale sorgente mediante una sequenza di campioni ottenuta prelevando il valore istantaneo di ampiezza del segnale ad intervalli fissati di tempo aventi estensione temporale π/ω_0, è che il segnale sia a banda limitata, cioè tale che valga

$$F(\omega) = 0 \text{ per } |\omega| \geq |\omega_0|$$

per una certa ω_0 e che la frequenza di campionamento sia

$$\omega_c \geq 2\omega_0$$

$F(\omega)$ è la trasformata di Fourier del segnale $f(t)$.

Tale procedimento viene detto campionamento, o più precisamente campionamento uniforme, rispetto al tempo.

Si può considerare il caso critico in cui valgono

$\omega_c = 2\omega_0$ (detta frequenza di Nyquist)

$F(\omega_0) \neq 0$

e il campionamento non consente la ricostruzione del segnale sorgente.

Queste condizioni sono dimostrate dal teorema del campionamento (detto anche di Nyquist) seguente.

<u>Teorema del campionamento</u>
<u>(caso monodimensionale)</u>

<u>Enunciato</u> Sia f(t) una funzione di una variabile reale avente la trasformata integrale di Fourier $F(\omega)$ a banda limitata cioè tale che

$$F(\omega) = 0 \text{ per } |\omega| \geq |\omega_0|$$

allora

(1) f(t) è completamente determinata conoscendo i suoi valori nei punti in cui t vale $\pi k/\omega_0$,

con k = [... , -2, -1, 0, 1, 2, ...]

Inoltre, $f(t)$ può essere espressa nella forma

$$(2)\ f(t)=\sum_{k=-\infty,+\infty} f(\pi k/\omega_0)\frac{\operatorname{sen}(\omega_0(t-\pi k/\omega_0))}{\omega_0(t-\pi k/\omega_0)}$$

Dimostrazione. Consideriamo la coppia di integrali di Fourier

$$(3)\ F(\omega) = \int_{t=-\infty..+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$(4)\ f(t) = 1/(2\pi)\int_{\omega=-\infty..+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Essendo $f(t)$ a banda limitata possiamo assumere $F(\omega)$ come uno spettro periodico e perciò, espandendo $F(\omega)$ in serie di Fourier nel periodo fondamentale $2\omega_0$, otteniamo

$$(5)\ F(\omega) = \sum_{k=-\infty,+\infty} c_k e^{(jk\pi\omega/\omega_0)} \quad \text{per } |\omega| < |\omega_0|$$

dove i termini c_k sono i coefficienti di Fourier cioè

$$(6)\ c_k = 1/(2\omega_0)\int_{\omega=-\omega_0..\omega_0} F(\omega)e^{-(jk\pi\omega/\omega_0)}d\omega$$

L'equazione (4) ci suggerisce i seguenti valori per i coefficienti della serie di Fourier nell'equazione (6)

$$(7)\ f(-k\pi/\omega_0)=1/(2\pi)\int_{\omega=-\omega_0..\omega_0} F(\omega)e^{-(jk\pi\omega/\omega_0)}d\omega$$

Perciò

$$(8)\ c_k = (\pi/\omega_0)\ f(-k\pi/\omega_0)$$

Queste equazioni mostrano che i coefficienti di Fourier sono completamente determinati conoscendo i valori della funzione originale f(t), campionata ad intervalli di tempo π/ω_0. Perciò $F(\omega)$ è univocamente determinata conoscendo i valori campionati delle ordinate (ovvero delle ampiezze).

Questo d'altra parte garantisce la determinazione univoca di f(t) mediante l'equazione (4), poiché le coppie di integrali di Fourier si determinano univocamente a vicenda.

Abbiamo dimostrato la validità dell'equazione (1); dimostriamo ora che anche la (2) è vera.

Ricordiamo che

$$\lim_{x \to 0} (\mathrm{sen}\ x)/x = 1$$

e notiamo che il termine di destra della (2) è una funzione del tempo che perciò assume i valori di $f(k\pi/\omega_0)$ agli istanti

$t = k\pi/\omega_0$.

Peraltro, tutti i termini della serie della (2) si annullano per $t = \pm\ n\pi/\omega_0$, con n intero positivo, tranne che per n = k per cui vale

(9) $$f(k\pi/\omega_0)\frac{\mathrm{sen}(\omega_0(\pi k/\omega_0-\pi k/\omega_0))}{\omega_0(\pi k/\omega_0-\pi k/\omega_0)} = f(k\pi/\omega_0)$$

Perciò il termine destro della (9) coincide con f(t) ai punti di campionamento. Ma secondo quanto dimostrato nella prima parte del teorema, la funzione f(t) è completamente determinata dai suoi valori ai punti di campionamento, quindi l'identità dei due termini della (2) è provata.

q. e. d.

Osserviamo infine che, quando sono rispettate le condizioni poste dal teorema del campionamento, i coefficienti dell'espansione in serie di Fourier di $F(\omega)$ permettono di determinare i valori dei campioni di $f(t)$ ovvero possiamo scrivere

$$(10)\quad \omega_0/\pi\ [\ldots,c_{-2},c_{-1},c_0,c_1,c_2,\ldots] = [\ldots,f(-2\pi/\omega_0),f(-\pi/\omega_0),f(0), f(\pi/\omega_0),f(2\pi/\omega_0),\ \ldots\ ]$$

Aliasing (equivocazione delle frequenze)

Il teorema del campionamento stabilisce un rapporto tra la massima frequenza presente nel segnale sonoro sorgente e la minima frequenza di campionamento che occorre per poter rappresentare l'informazione in frequenza del segnale sonoro sorgente stesso.

Abbiamo infatti bisogno di almeno due valori per ciclo (il picco minimo e il picco massimo) per ricostruire la massima frequenza della banda del segnale sorgente. In altri termini, se la frequenza massima della banda di frequenza del segnale da campionare è inferiore a $|\omega_0|$, allora deve valere la seguente relazione con la frequenza di campionamento ω_c:

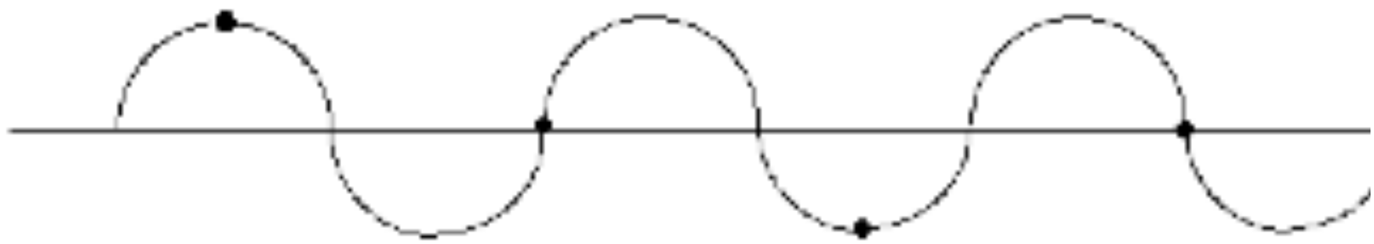
(11) $$\omega_c \geq 2|\omega_0|$$

Le frequenze $\omega_a \geq \omega_c/2$ non sono perciò rappresentabili con frequenza di campionamento ω_c perchè al di fuori della banda frequenziale determinata da ω_c; esse peraltro non scompaiono, ma vengono ribaltate nel codominio come se fossero basse frequenze ω_l secondo la relazione

(12) $$\omega_l = \omega_c - \omega_a$$

o, più in generale, se consideriamo una ampia banda di frequenza dello spettro, ovvero non solo attorno alla frequenza di campionamento, ma anche nelle repliche corrispondenti ai multipli k-esimi della frequenza di campionamento, possiamo scrivere:

(13) $$\omega_l = \pm k\omega_c \pm \omega_a$$



In figura vediamo un esempio in cui prelevando 4 campioni ogni 3 cicli possiamo poi ricostruire un segnale che avrà frequenza pari a $\omega_l = \omega_a/3$ essendo 4-3=1 pari ad 1/3 di 3.

Questo fenomeno viene detto **aliasing** o equivocazione delle frequenze o anche foldover.

In assenza di informazione a priori sulla banda di frequenza del segnale sorgente sarà quindi opportuno, una volta scelto il valore di frequenza di campionamento ω_c, eliminare dal segnale sorgente tutte le componenti frequenziali superiori o uguali a $\omega_c/2$ prima di procedere al campionamento stesso.

Un filtro ideale passabasso può soddisfare questa esigenza. Un filtro passabasso reale ha però un comportamento che suggerisce di prevedere opportuni margini rispetto alla frequenza di taglio.

In sintesi, possiamo dire che il teorema del campionamento mostra qual'è la relazione tra la banda di frequenza del segnale sorgente e la quantità minima di campioni da prelevare nell'unità di tempo per rappresentarla univocamente.

Metodi reali di campionamento

Il campionamento di cui abbiamo fin qui parlato può essere considerato un campionamento uniforme ideale.

Nella realtà i campioni non potranno essere istantanei, ma avranno una certa estensione temporale.

Accenniamo brevemente a due metodi reali per il campionamento di segnali.

Campionamento naturale

Il campionamento naturale consiste nel moltiplicare il segnale sorgente per un "treno" di impulsi rettangolari di ampiezza fissata.

Lo spettro del segnale campionato che si ottiene, contiene infinite repliche dello spettro del segnale sorgente che potranno essere filtrate mediante un opportuno filtro passabasso (ammesso che le repliche non abbiano sovrapposizioni).

Campionamento flat-top

Il campionamento flat-top è simile a quello naturale, però i campioni che si ottengono sono di ampiezza costante per tutta la loro estensione temporale.

Questa caratteristica implica la necessità in fase di ricostruzione del segnale sorgente di aggiungere un filtro equalizzatore dopo il filtro passabasso, che era invece già necessario nel caso del campionamento naturale.

Teorema del campionamento
(caso bidimensionale)

Del teorema del campionamento è significativo considerare anche le varie estensioni multidimensionali. In particolare, il caso bidimensionale è particolarmente importante nella trasmissione ottica, nella elaborazione delle immagini e in pattern recognition.

Diamo allora l'enunciato del teorema del campionamento uniforme bidimensionale; tralasciamo qui di dare la dimostrazione poiché è facilmente derivabile da quella del caso monodimensionale che abbiamo già visto e potrà quindi essere fatta come esercizio.

Enunciato Sia $f(t,u)$ una funzione di due variabili reali avente la trasformata integrale di Fourier $F(\omega,\sigma)$ a banda limitata cioè tale che

$$F(\omega,\sigma) = 0 \text{ per } |\omega| \geq |\omega_0| \text{ e } |\sigma| \geq |\sigma_0|$$

allora
(14) $f(t,u)$ è completamente determinata conoscendo i suoi valori nei punti in cui t vale $\pi k/\omega_0$ con
$k = [\ \ldots\ , -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ ]$
e u vale $\pi n/\sigma_0$ con
$n = [\ \ldots\ , -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ ]$

Inoltre, $f(t,u)$ può essere espressa nella forma

$$(15)\quad f(t,u)=\sum_{k=-\infty,+\infty}\sum_{n=-\infty,+\infty} f(\pi k/\omega_0,\pi n/\sigma_0)$$

$$\bullet\ \frac{\mathrm{sen}(\omega_0(t-\pi k/\omega_0))}{\omega_0(t-\pi k/\omega_0)} \qquad \frac{\mathrm{sen}(\sigma_0(u-\pi n/\sigma_0))}{\sigma_0(u-\pi n/\sigma_0)}$$

<u>Teorema del campionamento</u>
<u>(nel dominio del tempo)</u>

<u>Enunciato</u> Sia $F(\omega)$ uno spettro di Fourier, corrispondente a un segnale $f(t)$ reale limitato nel tempo ovvero tale che

$$|f(t)|=0 \text{ per } |t| \geq |t_0|$$

allora

(16) $F(\omega)$ è completamente determinato conoscendo i suoi valori nei punti in cui ω vale $\pi k/t_0$,
con $k = [\ \ldots\ ,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ]$

<u>Dimostrazione</u> E' analoga alla dimostrazione del teorema del campionamento nel dominio del tempo; possiamo ottenere questa dimostrazione dalla precedente sostituendo t con ω, t_0 con ω_0 e f con F.

La conclusione del teorema nel dominio delle frequenze sarà perciò la seguente

$$(17)\quad F(\omega)=\sum_{k=-\infty,+\infty} F(\pi k/t_0)\frac{\operatorname{sen}(t_0(\omega-\pi k/t_0))}{t_0(\omega-\pi k/t_0)}$$

e $F(\omega)$ è completamente determinato quando sono noti i suoi valori nei punti
$[\ldots,-2\pi/t_0,-\pi/t_0,0,\pi/t_0,2\pi/t_0,\ldots]$