Modelli fisici di sistemi acustici

0. Sistemi acustici

Si definiscono tali i sistemi in grado di generare, come risposta ad una sollecitazione, vibrazioni del mezzo circostante (aria, acqua, o altro) su frequenze percepibili (comprese cioé tra i 20 Hz ed i 20 kHz).

Tra i sistemi acustici vi sono gli strumenti musicali, appositamente pensati per la produzione di suoni "gradevoli" e controllabili.

1. Scopi della modellazione

Punto di vista fisico

- comprendere tutti i fenomeni che concorrono alla creazione di un dato suono, ed in ultima analisi descrivere con precisione i principi fisici su cui si basa il funzionamento del sistema in questione.

Punto di vista musicale

- generare suoni simili a quelli di sistemi acustici fisici (strumenti musicali o altro) mediante l'uso di algoritmi le cui variabili siano in relazione con grandezze fisiche

Le attuali conoscenze nel campo dei modelli fisici derivano dagli studi condotti da entrambi i punti di vista.

1.1 Validità di un modello fisico

Punto di vista fisico

Il modello é completo solo quando si é certi di avere spiegato tutti gli aspetti del comportamento dell'oggetto in questione. Questo comporta che tutte le variabili fisiche coinvolte (masse, forze, costanti elastiche, dissipazioni) vengano considerate nel modello.

Ad esempio, le microvariazioni spettrali sono alla base della "ricchezza" dei suoni naturali, in quanto rendono non stazionaria anche la fase compresa tra l'attacco ed il decadimento di un suono. In molti casi non é tuttavia ancora noto come queste vengano prodotte.

Punto di vista musicale

Il modello vale se permette (possibilmente in tempo reale) di produrre suoni somiglianti quelli degli strumenti musicali, potendo applicare delle modificazioni del timbro mediante l'azione su variabili a cui si possa associare un significato fisico (pressione, flusso, ecc.).

La descrizione del sistema non deve essere necessariamente rigorosa, ma piuttosto "vigorosa".

Il modello deve rispondere in maniera prevedibile in funzione delle variabili "fisiche"coinvolte nella simulazione.

Uno di principali vantaggi dell'approccio alla sintesi dei suoni basato sui modelli fisici rispetto al tradizionale approccio algoritmico (TVF, AM, FM) é infatti la possibilità fare previsioni sui suoni che vengono generati.

2. Principi di funzionamento dei sistemi acustici

Tutti i sistemi acustici producono oscillazioni, e pertanto devono contenere almeno un oscillatore acustico (un oscillatore per un tamburo, N oscillatori nel caso del pianoforte).

Un sistema acustico in generale é composto da elementi con funzioni diverse:

- eccitatori

mettono in movimento il sistema, spesso in maniera caotica (si pensi al flusso d'aria in una canna d'organo),

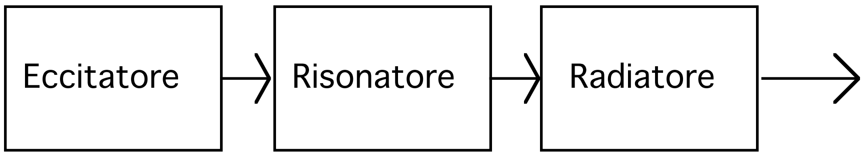
- oscillatori

servono a selezionare tra le frequenze contenute nell'eccitazione solo quelle appartenenti ad un certo insieme (ad esempio una famiglia di armoniche),

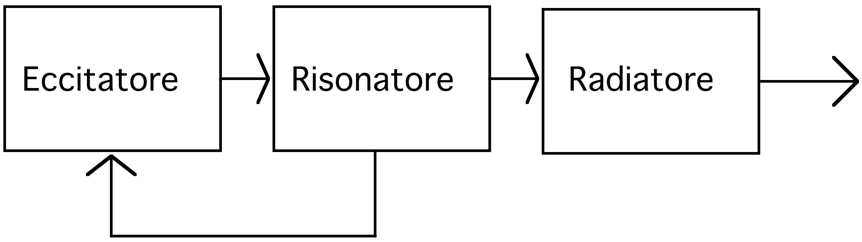
- dissipatori o radiatori,

sono necessari per poter trasmettere l'energia dallo strumento all'ambiente circostante.

Esistono due schemi fondamentali per la sintesi sonora basata su modelli fisici:



Sintesi diretta



Sintesi con retroazione

A seconda del modello si trattano gli elementi in maniera diversa. Per esempio, una corda può essere trattata come eccitatore periodico di una cassa di risonanza, piuttosto che come un risonatore.

Una importante distinzione va fatta tra le componenti che si possono trattare in maniera lineare e quelle che non possono essere modellate linearmente.

2.3 Sistemi lineari

Quando é possibile, un approccio lineare al problema permette di applicare i metodi delle trasformate in frequenza (Fourier, Laplace, Z).

I sistemi lineari oscillanti sono caratterizzati dal "modi" di oscillazione propri del sistema, cioé frequenze a cui il sistema dissipa poca energia. Tali frequenze sono dette anche "frequenze di risonanza".

Si usa quindi modellare linearmente i risonatori degli strumenti musicali.

Il principale limite dei sistemi lineari consiste nel totale disaccoppiamento dei modi di oscillazione.

Non vi é scambio di energia tra le diverse frequenze, perciò una volta sollecitato un sistema lineare con una certo insieme di frequenze, esso mostra una risposta che contiene al più tutte le frequenze della sollecitazione.

Mediante modelli lineari non é quindi possibile riprodurre le microvariazioni spettrali (che nel tempo sono aperiodicità) tipiche dei suoni naturali complessi.

2.3.1 Variabili fisiche

In un modello fisico le variabili ed i parametri prendono spunto da valori misurati nel mondo fisico.

Nell'analisi di un sistema acustico lineare si considerano coppie di variabili come:

F : <u>forza</u> e v : <u>velocità</u>
($M \cdot L/T^2$) (L/T)

p : <u>pressione</u> e u: <u>corrente di flusso</u>
(F/L^2) (L^3/T)

il cui prodotto é una potenza (E/T).

(M = massa, L = lunghezza, T = tempo, E = energia)

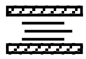
Questo approccio permette di utilizzare, per le parti lineari del sistema, un formalismo analogo a quello dei circuiti elettrici, in cui si lavora con:

tensione (E/Q) e corrente (Q/T)

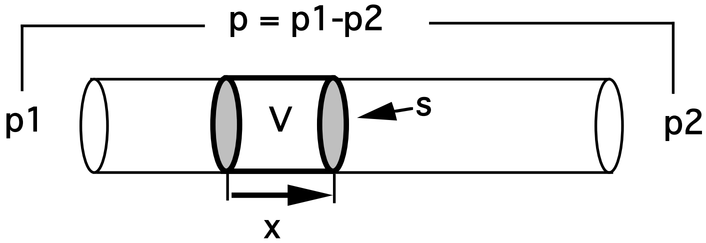
il cui prodotto é una potenza (Q = carica, E = energia)

2.3.2 Componenti lineari

Analogamente a quanto avviene in elettronica anche in acustica esistono tre componenti con cui si costruisce un sistema lineare in grado di esibire un comportamento oscillatorio.

Resistenza acustica (Dissipatore) 

Dissipa energia nello spostamento x a velocità costante di un volume di aria spinta da una pressione p attraverso una conduttura di sezione s.



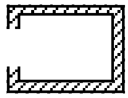
La relazione che lega pressione (p) e corrente di volume (u = V/t) é:

$$p(t) = R_a \cdot u(t) \qquad (2.1)$$

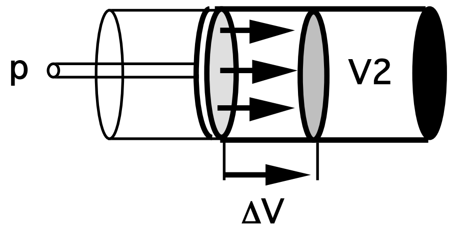
Applicando la trasformata di Laplace alla (2.1) si vede che l'impedenza acustica $R_a(\omega)=P(\omega)/U(\omega)$ é un numero reale che può tuttavia variare in funzione della frequenza. La pressione e il flusso ai capi di una resistenza sono in fase.

Per produrre un certo flusso d'aria in un condotto, occorre applicare una pressione tanto maggiore quanto é la resistenza acustica del condotto.

Fonti di resistenza acustica sono i condotti di sezione ridotta.

Capacità acustica (Integratore) 

Accumula energia potenziale mediante la compressione di un volume d'aria (da V_1 a V_2, $\Delta V = V1 - V2$) dentro un contenitore.



La relazione che lega pressione (p) e corrente di volume (u = V/t) é:

$$p(t) = 1/C_a \cdot \int_0^t u(\tau)d\tau \qquad (2.2)$$

La trasformata di Laplace della (2.2)

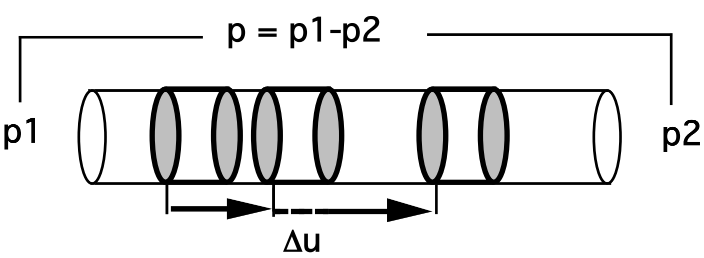
$$P(s) = 1/sC_a \cdot U(s) \qquad (2.3)$$

mostra che l'impedenza della capacità acustica é $1/sC_a$. La capacità introduce uno sfasamento di -90° tra pressione e flusso.

Fonte di capacità acustica sono i contenitori

Inertanza (Derivatore) 

Accumula energia cinetica in relazione alle variazioni del flusso d'aria (da u_1 a u_2, $\Delta u = u_1 - u_2$) attraverso un condotto. In altre parole, rende conto dell'inerzia della massa d'aria.



La relazione che lega pressione (p) e corrente di volume ($u = V/t$) é:

$$p(t) = L_a \cdot du(t)/dt \qquad (2.4)$$

La trasformata di Laplace della (2.4)

$$P(s) = sL_a \cdot U(s) \qquad (2.5)$$

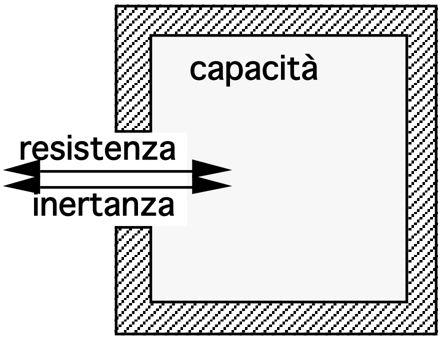
mostra che l'impedenza della inertanza é sL_a. L'inertanza introduce uno sfasamento di 90° tra pressione e flusso.

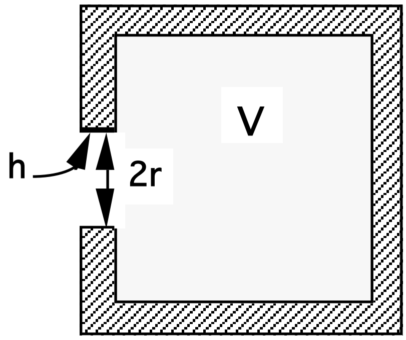
Fonte di inertanza sono le masse d'aria

2.3.3 Risonatore di Helmoltz (1870 ca.)

Si tratta del più semplice risonatore acustico usato negli strumenti musicali.

E' composto da un volume d'aria racchiuso in una cavità, accoppiato con l'esterno per mezzo di una apertura.





Le misure sperimentali danno, per una apertura circolare di raggio r e spessore h una resistenza ed una inertanza rispettivamente pari a:

$R_a = \rho\omega^2/4\pi c$, $\qquad L_a = \rho(h+1.7r)/\pi r^2$

e per una cavità di volume V la capacità é:

$C_a = V/\rho c^2$

dove ρ é la densità dell'aria e c é la velocità del suono
Il risonatore é la combinazione in serie dei tre elementi R_a, L_a, C_a. L'equazione é quindi:

$$p(\omega) = U(\omega) \cdot (R_a(\omega)+j(\omega L_a-1/\omega C_a)$$

Risolvendola in funzione di U, si trova che la frequenza per cui si ha il massimo flusso attraverso l'apertura del risonatore é:

$$\omega = 2\pi\sqrt{1/L_a C_a}$$

Questa é la frequenza propria del risonatore

Trascurando il termine dissipativo R_a il risonatore di Helmoltz si comporta come una oscillatore in cui una molla di costante K é accoppiata ad una massa M. La cui frequenza di risonanza di tale oscillatore meccanico é:

$$\omega = 2\pi\sqrt{K/M}$$

Il risonatore di Helmoltz costituisce l'elemento risonante di molti strumenti, come la viola, il violino, la chitarra, l'ocarina, il fischietto, la celesta e molti altri.

2.4 Sistemi non lineari

Nel mondo reale vi sono molti casi in cui una trattazione lineare non é adatta a descrivere i fenomeni osservati.

Un flauto, in cui aumentando leggermente la pressione del getto d'aria si raddoppia la frequenza del suono prodotto, é un semplice esempio di sistema non lineare.

Non si possono in generale trattare in maniera lineare (a meno di perdere alcune caratteristiche anche fondamentali dei processi in gioco):

- le turbolenze dei getti d'aria
- spostamenti di masse in posizioni lontane dall'equilibrio
- in generale le vibrazioni di materiali non omogenei
- le eccitazioni prodotte dagli strumentisti

In questi casi si ricorre all'introduzione di formule empiriche, e a metodi statistici.

2.5 Modellazione degli accoppiamenti

I singoli componenti, lineari o meno, di un sistema acustico sono connessi tra loro per mezzo accoppiamenti meccanici (punti di contatto) e fluidodinamici (flussi d'aria).

A loro volta i punti di contatto possono essere statici (il ponticello di un violino, incollato alla cassa), o dinamici (l'archetto che si posa sulla corda e che slitta rispetto ad essa nel suo moto rettilineo).

E' per mezzo degli accoppiamenti che i componenti di un sistema acustico si scambiano energia, ed é tramite questi che si realizza la retroazione.

In alcuni casi il flusso di energia é praticamente in una direzione sola, come nel caso dell'accoppiamento tra una cassa armonica di un violino e l'ambiente circostante.

In altri casi ancora, componenti in diretto contatto fisico non scambiano praticamente energia. Un caso tipico é quello di una corda oscillante, che dissipa la sua energia in attriti interni, trasmettendo pochissima energia all'aria che la circonda.

3. Approcci alla simulazione

Lo studio di ogni sistema acustico richiede una analisi dettagliata di tutti gli aspetti rilevanti per la generazione del segnale acustico.

In funzione della complessità e del grado di generalità si possono seguire diversi approcci:

- <u>globale</u>
una equazione che descrive l'evoluzione dinamica di tutto il sistema,

- <u>a blocchi</u>
un sistema di equazioni ognuna delle quali descrive l'evoluzione di una parte, lineare o meno, del sistema; l'interazione di una parte con l'altra avviene mediante la condivisione di varibili dinamiche,

- <u>atomico</u>
il sistema viene creato connettendo moltissimi oscillatori elementari smorzati che scambiano tra loro energia,

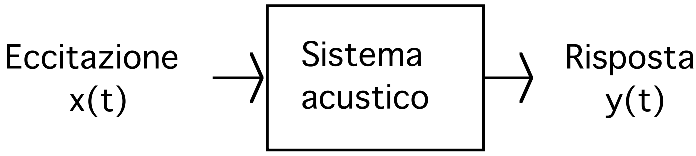
- <u>modulare</u>
insiemi di oscillatori elementari indipendenti vengono connessi tra loro mediante matrici di ridistribuzione dell'energia sui rispettivi modi di oscillazione.

3.1 Simulazione globale

Qualora sia possibile, si può tentare di descrivere tutta l'evoluzione del sistema mediante una unica equazione in una variabile.

L'equazione deve rendere conto del comportamento nel tempo della variabile di uscita y (punto d'ascolto) in relazione alla sollecitazione in ingresso x.

Lo schema di sintesi é:



Genericamente l'equazione di evoluzione di y in funzione di x si scrive:

$$f(\ddot{y}, \dot{y}, y) = g(\ddot{x}, \dot{x}, x) \qquad (3.1)$$

Si tratta quindi di una equazione differenziale, che coinvolge le accelerazioni $\ddot{y}$ e le velocità $\dot{y}$ del punto d'ascolto e del punto di sollecitazione.

Qualora il sistema sia lineare, e i coefficienti siano costanti (per un ancia ad esempio la forza di richiamo non vari in funzione della posizione), si può applicare una trasformazione in frequenza, e riscrivere la (3.1) come:

$$\left(\frac{b_2}{s^2} + \frac{b_1}{s} + b_0\right)Y(s) = \left(\frac{a_2}{s^2} + \frac{a_1}{s} + a_0\right)X(s) \tag{3.2}$$

cioé calcolare l'uscita come prodotto:

$$Y(s) = Z(s) \cdot X(s) \tag{3.3}$$

In tali condizioni il sistema si comporta come un filtro lineare. L'antitrasformata dell'impedenza, cioé z(t) é nota in fisica come funzione di Green del sistema.

Qualora il sistema non sia modellabile con una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, occorre trovare l'integrale della (3.1), impresa talvolta impossibile, e comunque difficilmente proponibile per la sintesi in tempo reale.

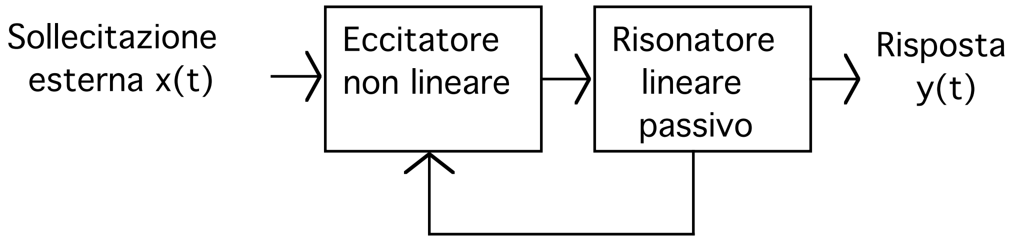
3.2 Simulazione ibrida con calcolo nel dominio del tempo (Oscillatore Musicale Universale)

E' basata sulla separazione delle componenti lineari da quelle non lineari.

Il meccanismo di eccitazione é considerato non lineare, mentre il sistema risonante é trattato con un modello lineare.

I due sottosistemi interagiscono tra di loro condividendo una o più variabili dinamiche.

Lo schema di simulazione é:



In questa schematizzazione, la sollecitazione esterna può essere continua (come un soffio d'aria od un archetto che si muove in una direzione), in quanto l'eccitatore é preposto alla trasformazione della sollecitazione in una forma più o meno periodica che va ad eccitare il risonatore.

Il comportamento del risonatore influenza a sua volta l'eccitatore. Così facendo, si introduceall'ingresso del risonatore una eccitazione dal contenuto spettrale dinamicamente variabile.

Un aspetto interessante di questo schema é la possibilità di calcolare l'uscita con una tecnica step by step nel tempo, utilizzando cioé le variabili all'istante n-1, per calcolare quelle all'istante n.

Lo schema, proposto da McIntyre, Shumacher, Woodhouse (1983), é alla base della simulazione di molti strumenti musicali tra i quali il clarino, il violino, il flauto, le canne d'organo.

Per altri strumenti, in cui la sollecitazione é impulsiva, é difficile concentrare le non linearità nell'eccitatore, ed é quindi meno applicabile lo schema dell'oscillatore musicale universale.

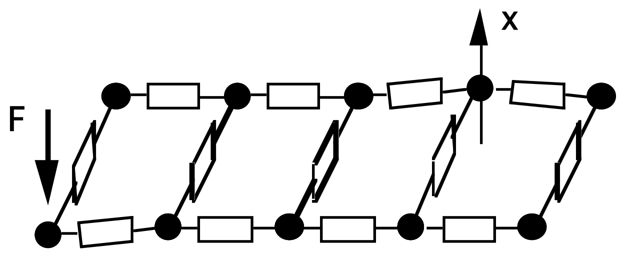
3.3 Simulazione "atomica" (Cadoz)

Gli schemi visti sopra si adattano bene situazioni specifiche, meno bene alla simulazione di un generico sistema oscillante.

Un approccio alternativo alla modellazione di componenti complessi é quallo, più intuitivo, ma computazionalmente più impegnativo di:

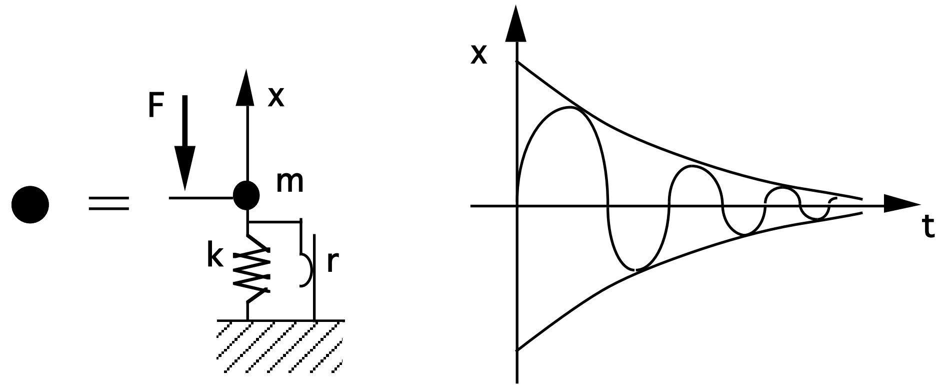
- connettere tra loro tanti oscillatori armonici smorzati,
- sollecitare uno o più oscillatori,
- prelevare il segnale in uscita come posizione di un oscillatore appropriato.

Lo schema di simulazione é:

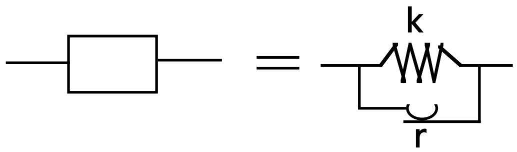


dove ogni elemento é un oscillatore lineare ed ha quindi equazione del moto:

$$F(t) = m\ddot{x}(t) - r\dot{x}(t) + kx(t)$$



Oscillatore smorzato



Legame visco-elastico

Con questo approccio si possono simulare corde, tavole armoniche, o sistemi a tre dimensioni, con tecniche di calcolo step by step matriciali.

Si possono realizzare "strumenti virtuali", in cui le caratteristiche fisiche come l'elasticità, e la massa vengono distribuite su tutto il sistema, e in cui si possono facilmente generare dei segnali di retroazione per l'esecutore.

I limiti di questo tipo di modelli sono:

- alto costo computazionale
- difficile controllo dei valori delle variabili
- elevata complessità descrittiva anche per sistemi semplici

3.4 Modelli modali

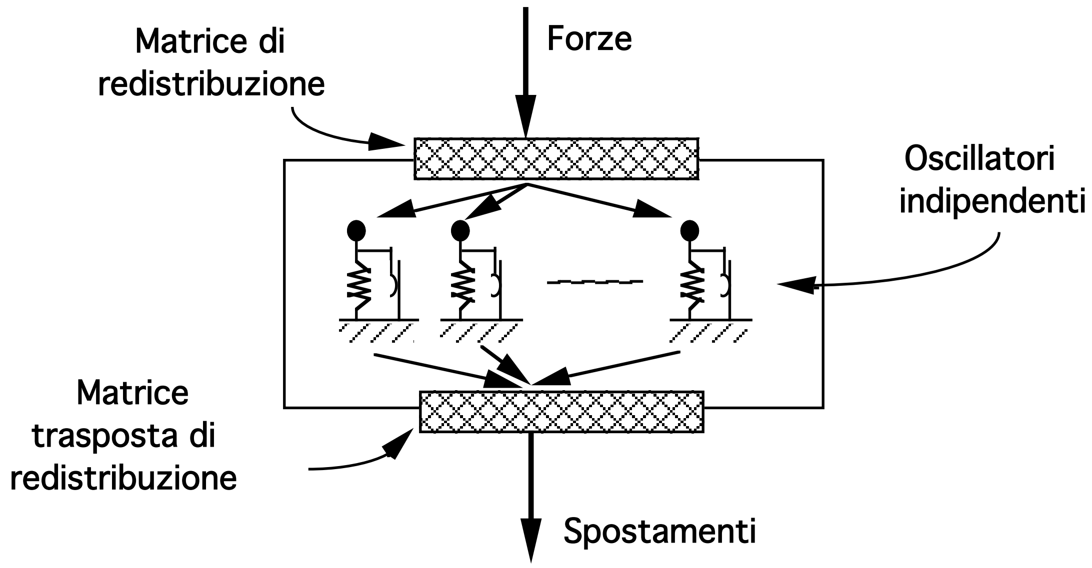
Nati come estensione dei modelli "atomici", si propongono di unire:

- la generalità descrittiva dei modelli atomici
- la semplicità dei modelli lineari
- l'immediato significato percettivo dello spettro di vibrazione

Dato un insieme di oscillatori lineari accoppiati, si determinano i modi di oscillazioni (tra loro indipendenti) del sistema.

Si applica quindi una forza all'esterno, avendo cura di distribuirne una quantità appropriata su ciascun modo di vibrazione.

In uscita si vanno a raccogliere i contributi di ciascun modo di vibrazione e li si ricombina per ottenere gli spostamenti del punto di ascolto.



Il calcolo può essere effettuato con tecnica
step by step, rendendone possibile l'implementazione real-time.

Una volta trovata le basi di diagonalizzazione di due sistemi, l'accoppiamento tra di essi consiste nel determinare una matrice di ridistribuzione dell'energia dai modi di un sistema a quelli dell'altro.

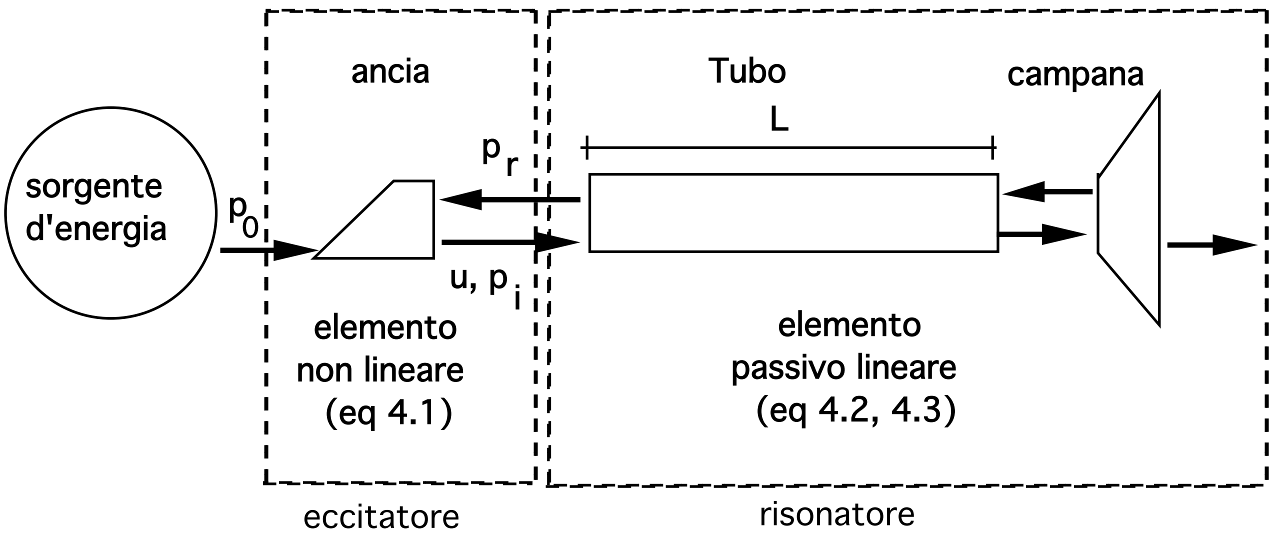
4. Esempi di modelli per la sintesi sonora

Nel seguito sono esposti alcuni modelli utilizzati per la sintesi di segnali musicali.

Essi sono basati sulle tecniche viste in precedenza, e sfruttano implementazioni algoritmiche particolarmente efficienti.

4.1 Simulazione di clarino mediante UMO (oscillatore musicale universale)

Schematicamente il modello comprende un eccitatore ed un risonatore.



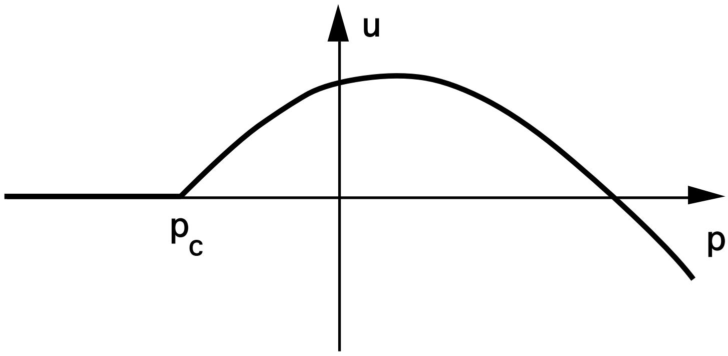
Supponendo che L >> A (A=sezione) l'impedenza del tubo é $Z = \rho c/A$, costante in frequenza.

L'eccitatore é trattato mediante una funzione non lineare, tabulata in memoria che prende spunto da misure sperimentali. La relazione lega il flusso entrante u(t) con la pressione all'imboccatura $p(t) = p_i(t)+p_r(t)$.

L'equazione é

$$u = F(p) \qquad (4.1)$$

La forma della funzione F é:



Se la pressione interna diventa eccessivamente negativa l'ancia, spinta dall'esterno, si chiude, dando flusso nullo. In tal caso l'ancia é "battente".
Per pressioni interne eccessivamente alte, il flusso é negativo, cioé l'aria esce dal clarino, invece di entrare.
La normale area di lavoro sta tra le due intersezioni con l'ascissa.

Invece di trattare la parte lineare con le trasformate in frequenza, si tiene conto del fatto che un impulso si propaga lungo un risonatore monodimensionale riflettendosi, almeno in parte, all'estremità opposta.
Per questo l'onda di pressione incidente p_i dà luogo ad un'onda riflessa p_r. Se $p_i(t) = \delta(t)$, l'onda riflessa é $p_r(t) = r(t)$.

Il flusso globale all'imboccatura é regolato dall'equazione (valida per il sistema lineare):

$$Z \cdot u(t) = p_i(t) - p_r(t)$$

Quest'ultima dice che il flusso globale all'imboccatura é la differenza tra flusso entrante e flusso uscente.

Si deduce quindi che la pressione all'imboccatura é:

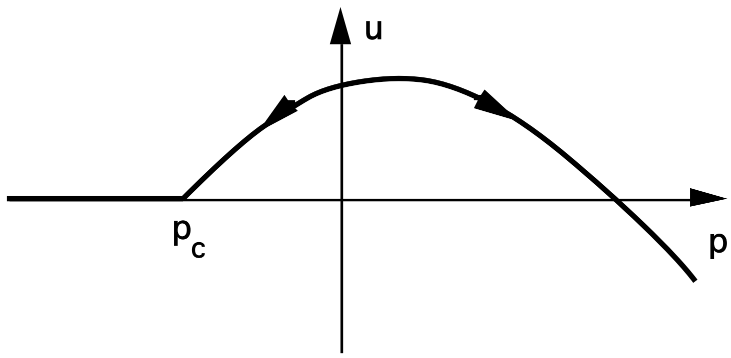
$$p(t) = 2 \cdot p_r(t) + Z \cdot u(t) \qquad (4.2)$$

dove la pressione riflessa é la convoluzione tra la funzione di riflessione r(t) e la pressione in ingresso:

$$2 \cdot p_r(t) = r(t) * \{p(t) + Z \cdot u(t)\} \qquad (4.3)$$

Partendo dal tempo t = 0, si impone una certa pressione in ingresso $p_i(t)$, e la si lascia propagare fino in fondo al tubo.

L'onda impiega $N = (1/T) \cdot 2L/c$ campioni per tornare indietro. Finché l'onda riflessa non torna, la pressione all'ingresso varia come $p_i(n)$, ed il flusso é calcolato mediante la (4.1) (curva percorsa all'indietro) . Al tempo N, usando u(N-1) la (4.3) dà $p_r(N)$ diversa da 0, la (4.2) dà la pressione globale al tempo N, e si può quindi calcolare il flusso u al tempo N mediante la (4.1) (curva percorsa in avanti).



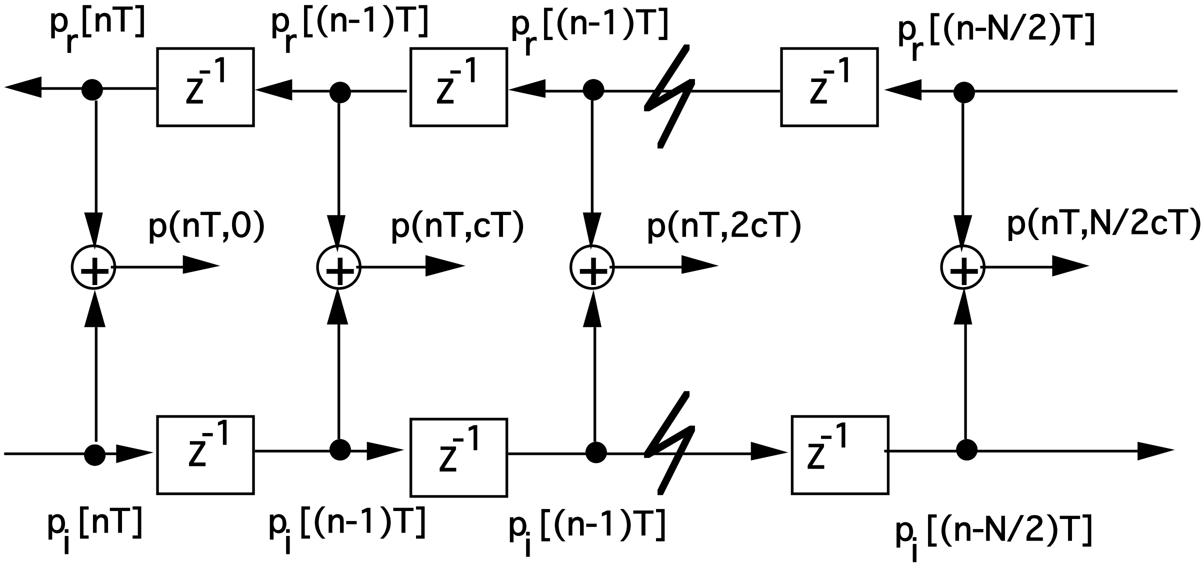
Per ogni tempo successivo le variabili vengono calcolate iterativamente.

L'uscita del clarino é la parte dissipata all'estremità aperta, quando l'improvvisa diminuzione di pressione causa la riflessione di parte dell'onda incidente.

Il suono prodotto é quindi proporzionale a $p_r(t)$.

<u>Il tubo</u>

Nella pratica, il tubo é realizzato mediante una guida d'onda digitale senza perdite:

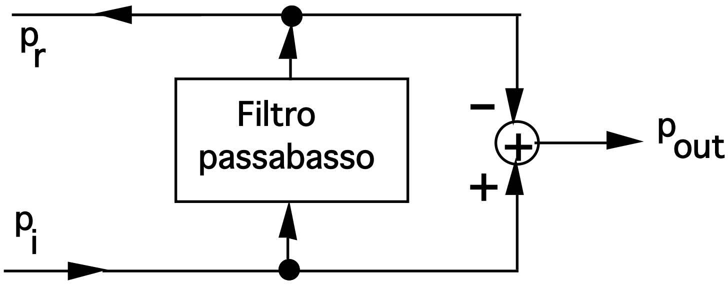


dove $p(nT)$ e $p_i(nT)$ sono calcolate secondo le (4.2) e (4.3).

<u>La campana</u>

Nella realtà la campana non riflette in egual modo tutte le frequenze. Vengono infatti irradiate all'esterno soprattutto le frequenze alte, e riflesse quelle basse.
La campana agisce quindi come un filtro.

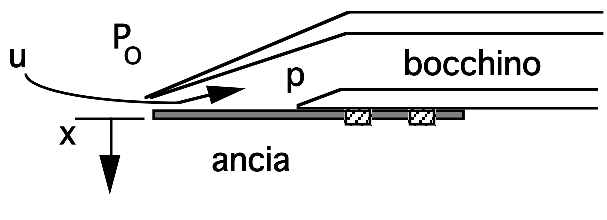
Sfruttando un solo filtro passabasso si può realizzare un semplice modello della campana



E' possibile modellare la risposta della campana utilizzando un filtro FIR del secondo ordine.

L'ancia

Al fine di rendere più realistico nonché più controllabile il modello é opportuno dare all'ancia una massa, ed associare ad essa un'equazione di evoluzione dinamica.



Misure sperimentali hanno mostrato che il flusso d'aria u(t) attraverso la fessura del bocchino é:

$$dp = \frac{u\sqrt{|u|}}{A^{3/2} \cdot x^2} + I_a \cdot \dot{u} \qquad (4.4)$$

dove dp é la pressione P_0-p ai capi dell'ancia, x é la posizione dell'estremità dell'ancia, A é una costante sperimentale, I_a é l'inertanza dell'aria contenuta nella fessura.

Poiché l'inertanza agisce come un filtro passabasso, la si può inglobare nel risonatore mediante un filtro. Annullando il secondo termine della (4.4) si può risolvere l'equazione alle differenze finite del moto dell'ancia ed ottenere:

$$x(n)=c_1 \cdot dp+c_2 \cdot x(n-1)+c_3 \cdot x(n-2)+c_4 \qquad (4.5)$$

dove le costanti sono espresse in funzione di parametri fisici come la massa dell'ancia, il coefficiente di smorzamento e altre.

La (4.5), permette di esprimere la posizione dell'ancia in funzione del flusso u(t) mediante la (4.4). Questa equazione, insieme alle (4.1, 4.2, 4.3) descrive l'evoluzione dinamica del clarino.

I fori

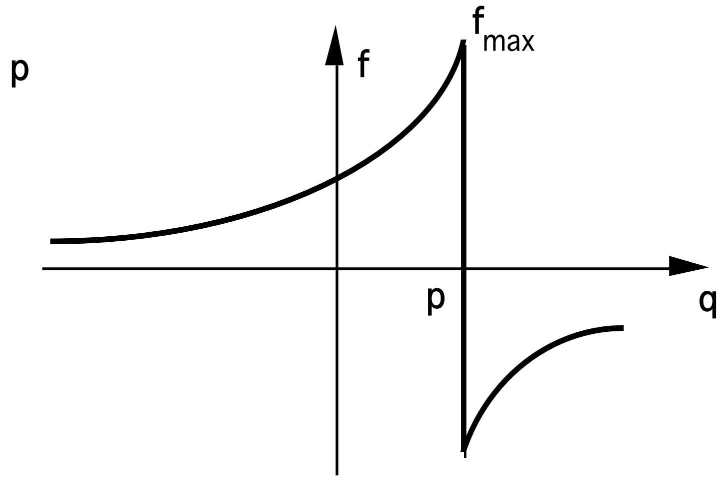
E' possibile rendere conto della presenza dei fori lungo il tubo introducendo filtri passabasso tipo quelli visti per la campana.

4.2 Corda sfregata dall'archetto

Il modello dell'oscillatore musicale universale può essere applicato anche al caso della interazione non lineare tra una corda e l'archetto che sfrega su di essa.

In questo caso la corda é il risonatore lineare, e la non linearità del vincolo viene rappresentata dalla equazione sperimentale che lega la forza d'attrito f(t) con la velocità trasversale della corda:

$$f(t) = F(q(t)) \qquad (4.6)$$



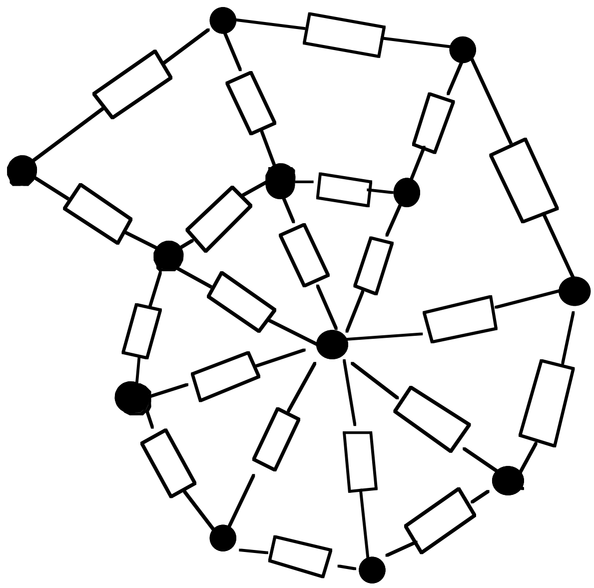
La forte non linearità si manifesta quando la velocità q della corda raggiunge quella p dell'archetto.

L'equazione (4.6) ha in questo modello la stessa funzione della (4.1) nel clarino.

4.2 Piatto ad elementi discreti

L'approccio atomico permette di costruire strutture dalla geometria varia, connettendo punti materiali tra loro.

Partendo dall'osservazione che i piatti sono costruiti arrotolando a spirale una sottile striscia di lega metallica, Cadoz ha recentemente realizzato un piatto connettendo molte masse tra loro nella seguente maniera



Il risultato acustico dà frequenze divise in due insiemi, uno alto ed uno basso, in corrispondenza delle diverse lunghezze della linea arrotolata (lunga) e di quelle radiali (corte). Scegliendo le masse ed i vincoli in maniera appropriata si riesce a riprodurre il suono del piatto.

5. Problematiche di interazione con lo strumento simulato

A differenza di quanto avviene per i normali strumenti basati sulla sintesi, l'uso di modelli fisici permette una maggiore interazione con lo strumento stesso.

Durante l'esecuzione vi sono almeno tre diversi tipi di interazione con uno strumento:

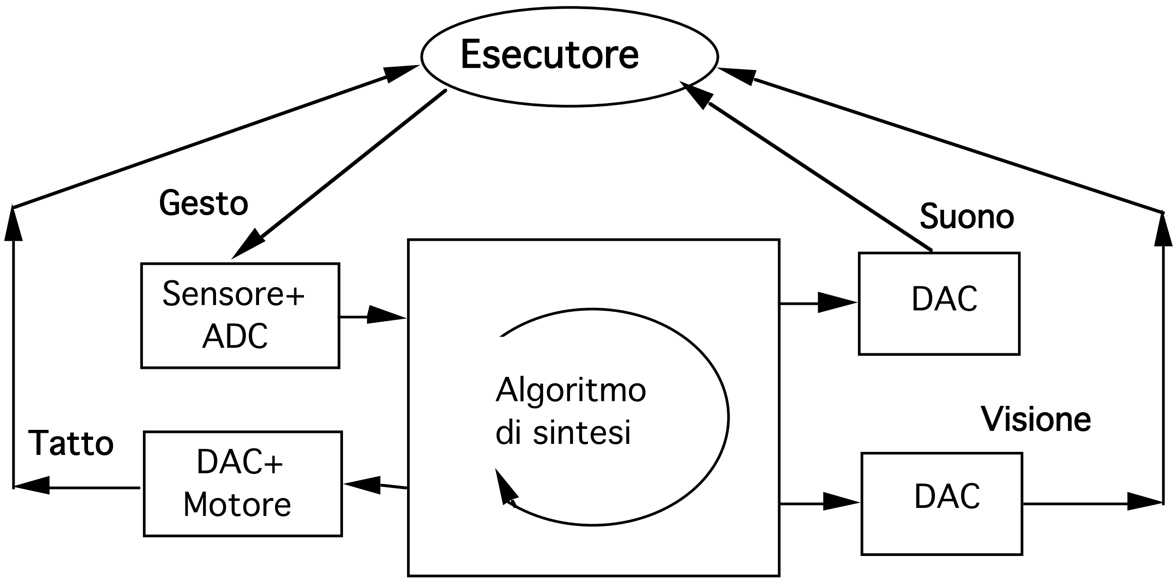
- azione eccitativa
- azione selettiva
- azione modulativa

Tali azioni formano il linguaggio comunicativo dello strumentista analogamente a verbi, nomi, aggettivi nel linguaggio parlato.

Un sistema che permetta il controllo di tali aspetti nella prassi esecutiva deve contemplare una reazione del sistema sull'esecutore.

Si prospetta quindi la necessità di imparare a suonare lo "strumento virtuale" al fine di poter controllare l'interpretazione.

Uno schema generale di "strumento virtuale" contempla inoltre una retroazione anche visiva nei confronti dell'esecutore, e dell'ascoltatore.



I modelli atomici si prestano particolarmente bene al prelievo di segnali di retroazione da inviare al musicista.